Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 8 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3 Punkte)* Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| = 1$. Untersuche, ob die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert. Falls die Folge konvergiert, dann bestimme ihren Grenzwert.

Lösung. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Falls $z = 1$, dann ist $z^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge ist konstant, konvergiert also gegen 1.
- Falls $z \neq 1$, dann gilt

$$|z^{n+1} - z^n| = |z^n| \cdot |z - 1| = |z|^n \cdot |z - 1| = |z - 1| > 0\,.$$

  Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgender Folgengliedern ist also positiv und konstant. Wir wollen überprüfen, ob $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es sei nun $\varepsilon = \frac{|z-1|}{2}$. Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$, dass $|z^N - z^{N+1}| > \varepsilon$. Also ist $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge und damit auch nicht konvergent.

■

Aufgabe 2: *(1+1+1+1 Punkte)* Es sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wir nennen $x \in \mathbb{R}$ ein *Maximum* von A, geschrieben $x = \max(A)$, falls

$$x \in A \quad \wedge \quad (\forall a \in A : \ a \leq x).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a) Falls $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, so ist dieses eindeutig.

(b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ offen, so existiert *kein* Maximum von A.

(c) Falls kein Maximum von $A \subset \mathbb{R}$ existiert, so ist A offen.

(d) Ist $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so existiert ein Maximum von A.

Führe zu den wahren Aussagen jeweils einen Beweis.
Gib zu den falschen Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel an.

Lösung.

(a) Die Aussage ist *wahr*. Angenommen, es gäbe zwei Maxima von A, genannt x_1 und x_2. Da $x_1, x_2 \in A$ und x_1 ein Maximum ist, folgt $x_2 \leq x_1$ Da x_2 ein Maximum ist, folgt aber auch $x_1 \leq x_2$ und somit $x_1 = x_2$.

(b) Die Aussage ist *wahr*. Angenommen, x wäre das Maximum. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ und somit wäre $x + \frac{\varepsilon}{2} \in A$. Dann gilt aber $x + \frac{\varepsilon}{2} > x$, im Widerspruch zur Annahme, dass x das Maximum von A ist.

(c) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel: Das halboffene Intervall $[0, 1)$ besitzt kein Maximum, ist aber nicht offen.

(d) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel: Es ist $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber $\mathbb{R}$ besitzt kein Maximum.

■

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Betrachte die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \frac{kn^k - 3}{n^2 + 1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Diskutiere die Konvergenz der Folge für $k = 1, 2, 3$.
Falls die Folge konvergiert, dann bestimme ihren Grenzwert.

Lösung. Durch Ausklammern von n^2 formen wir a_n um und erhalten

$$a_n = \frac{kn^{k-2} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}\,.$$

Nach dieser Umformung konvergiert der Nenner nun stets gegen 1, während die Konvergenz des Zählers von k abhängt:

- Falls $k = 1$, dann konvergiert der Zähler gegen 0.
- Falls $k = 2$, dann konvergiert der Zähler gegen 2.
- Falls $k \geq 3$, dann divergiert der Zähler.

Also konvergiert die Folge a_n für $k = 1$ gegen 0 und für $k = 2$ gegen 2. Im Fall $k = 3$ divergiert die Folge a_n. ■